Determination of the Weyl invariants and calculation of the coupling coefficients for unitary groups

1983 J. Phys. A: Math. Gen. 16 2891

(http://iopscience.iop.org/0305-4470/16/13/010)

J. Phys. A: Math. Gen. 16 (1983) 2891–2903. Printed in Great Britain

Détermination des invariants de Weyl et calcul des coefficients de couplage des groupes unitaires

M Hage Hassan†

Institut de Physique Nucléaire (et IN2P3), Université Claude Bernard Lyon I, 43, Bd du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France

Reçu le 23 juillet 1982, en forme définitive le 30 mars 1983

Resumé. Nous présentons une nouvelle approche pour la détermination des invariants de Weyl des groupes unitaires en prenant comme point d'appui, la fonction génératrice de la base de la représentation des groupes unitaires que nous avons construite dans untravail antérieur. Nous obtenons, pour les invariants de Weyl, deux expressions entermes fonctions des paramètres dont dépend la fonction génératrice et dans l'une d'elles, apparaissent les coefficients de couplage. La comparaison des développements des deux expressions obtenues permet le calcul des coefficients de couplage. L'application de cette approche au calcul des coefficients de couplage du produit direct $[\lambda^1 0]\otimes[\lambda^2\mu^2]$ du groupe SU(3) nous a donné une expression du facteur isoscalaire où n'intervient aucune sommation, alors que l'expression des coefficients de couplage connue jusqu'à ce jour en comporte cinq.

Abstract. We present a new approach for determining the Weyl invariants of unitary groups. Such an approach is based on the generating function of the basis of the representation for unitary groups built in an earlier work. We obtain two expressions for the Weyl invariants, both including the parameters involved in the generating function. Coupling coefficients appear in one of the expressions. The comparison of the development of the two expressions allows the calculation of the coupling coefficients. The application of this approach to the calculation of the coupling coefficients for the direct product $[\lambda^1 0]\otimes[\lambda^2\mu^2]$ of SU(3) leads to an expression of the isoscalar factor where no summation occurs in contradistinction with the known expression for the coupling coefficients which involve five summations.

1. Introduction

Les coefficients de couplage des groupes unitaires couplent tróis états d'une représentation irréductible pour donner un scalaire appelé invariant de Weyl ou invariant de Van der Waerden. Pour spécifier la représentation irréductible des groupes unitaires, Biedenharn *et al* (1969) ont trouvé une solution dans le cas de SU(3) et ont suggéré une extension de leur méthode au cas de SU(n).

Moshinsky a observé qu'un ensemble d'éléments de la base de la représentation irréductible contenue dans le produit direct de p représentations irréductibles de SU(n) preuvent être considérés comme les éléments d'une base de la représentation irréductible de SU($p(n-1)$) et en appliquant la méthode infinitésimale, Moshinsky (1962) a

† Adresse permanente: Université Libanaise, Faculté des Sciences, Section I, Hadeth, Beyrouth, Liban.

obtenu une expression des coefficients de couplage $[\lambda^1 0]\otimes[\lambda^2\mu^2]$ du produit direct du groupe SU(3) où interviennent cinq sommations. Par la suite, une formule de récurrence donnant les coefficients de couplage des groupes unitaires a été présentée par Brody *et al* (1965).

Une autre approche, désormais largement connue et déjà pressentie par Weyl en 1925 a été exposée par Van der Waerden en 1932, pour le calcul des coefficients de couplage du groupe SU(2): elle consiste en la construction des invariants de Weyl à partir de scalaires élémentaires du groupe SU(2) et en leur développement sur la base de la représentation du groupe SU(2). Cette méthode a été depuis, exploitée par Chew et Sharp (1967), Resnikoff (1967), Sharp et Lee (1971), et Hongoh (1974), qui se sont attachés au calcul des coefficients de couplage des groupes unitaires pour $n \geqslant 3$ et ont construit, tous les scalaires élémentaires des groupes unitaires. Cependant, dans leur travail, ils se sont heurtés à de grandes difficultés au niveau de la construction des invariants de Weyl.

Notre approche consiste à construire la fonction génératrice de la base de la représentation des groupes unitaires (Hage Hassan 1983) et à extraire l'expression des invariants de Weyl des éléments de la base de la représentation du groupe $SU(3(n-1))$ que nous déterminons. Nous constatons que notre démarche est en accord avec l'observation de Moshinsky citée précédemment.

En effectuant de deux manières différentes le développement de la fonction génératrice des groupes unitaires que nous avons établie (Hage Hassan 1983), nous obtenons deux expressions différentes des invariants de Weyl, en termes faisant appel aux paramètres dont dépend cette fonction. La comparaison des développements des deux expressions obtenues nous donne les coefficients de couplage des groupes unitaires.

Notre méthode se caractérise par sa simplicité et sa généralité, car elle permet sans difficulté, le calcul de tous les coefficients de couplage des groupes unitaires et l'étude de leurs propriétés de symétrie. L'application de cette méthode au calcul des coefficients de couplage $[\lambda^1 0]\otimes[\lambda^2\mu^2]$ du produit direct du groupe SU(3), présenté précédemment par Moshinsky, nous donne l'expression de ces coefficients sous la forme d'un produit de deux termes, où l'un des facteurs est le symbole 3-j du groupe SU(2) et l'autre terme est le facteur isoscalaire du groupe SU(3). Il est important de souligner que l'expression du facteur isoscalaire du groupe SU(3) que nous obtenons, ne fait intervenir aucune sommation.

Nous consacrons § 1 de ce travail au rappel des résultats dont nous avons besoin. Dans § 2 nous construisons la fonction génératrice des invariants de Weyl des groupes unitaires. La troisième partie donne la construction de la fonction génératrice des coefficients de couplage des groupes unitaires. Dans § 4 nous calculons les coefficients de couplage du produit direct $[\lambda^1 0]\otimes[\lambda^2\mu^2]$ du groupe SU(3). Il est important de souligner que ce travail fait suite au travail sur la fonction génératrice de la base de Gel'fand de la représentation du groupe unitaire (Hage Hassan 1983).

2. L'espace de la représentation de Bargmann–Moshinsky des groupes unitaires

2.1. *Espace de Bargmann*

Nous appelons $\mathscr{F}_n$ l'ensemble des fonctions analytiques entières $f(z)$, où $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ est un point de l'espace Euclidien complexe à n dimensions de C_n.

Le produit scalaire de deux éléments f et f' de $\mathscr{F}_n$ s'écrira

$$(f, f') = \int \overline{f(z)} f'(z)\, \mathrm{d}\mu_n(z) \tag{1}$$

avec la mesure

$$\mathrm{d}\mu_n(z) = \pi^{-n} \exp[-(\bar{z}z)] \prod_{k=1}^{n} \mathrm{d}z_k \tag{2}$$

où

$$z_k = x_k + \mathrm{i}y_k, \qquad \mathrm{d}z_k = \mathrm{d}x_k\, \mathrm{d}y_k, \qquad (\bar{z}z) = \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k z_k.$$

Le complexe conjugué de $f(z)$ est $\overline{f(z)}$.

A chaque transformation unitaire U_n de C_n on fait correspondre un opérateur T_{U_n} défini par

$$(T_{U_n} f)(z) = f({}^tU_n(z)), \tag{3}$$

${}^tU_n$ est le transposé de U_n.

2.2. Représentation de Bargmann–Moshinsky

Nous considérons l'espace $D_{[h]}$, avec $[h] = [h_1 \ldots, h_n]$, des polynômes homogènes qui est un sous-espace de $\mathscr{F}_n$. Toute fonction appartenant à $D_{[h]}$ est définie par

$$f(\lambda_1 z^1, \lambda_2 z^2, \ldots, \lambda_n z^n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{k_i} f(z^1, \ldots, z^n) \tag{4}$$

avec

$$k_1 \geqslant k_2 \geqslant k_3 \geqslant \ldots \geqslant k_n, \qquad z^i \in C_n,$$
$$h_1 = k_1 - k_2, \qquad h_2 = k_2 - k_3, \ldots, \qquad h_n = k_n.$$

Les vecteurs de la base du sous-espace $D_{[h]}$, base de Bargmann–Moshinsky, sont des polynômes homogènes $\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}(z^1, \ldots z^n)$ qui satisfont les conditions suivantes

$$C^{ii}\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}(z^1, \ldots, z^n) = h_i \Gamma_n\binom{[h]}{(h)}(z^1, \ldots, z^n), \tag{5}$$

$$C^{ij}\Gamma_n\binom{[h]}{(h)} = 0 \qquad \text{pour } i < j\, (i, j = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

où h_i sont des entiers positifs, et on note

$$C^{ij} = \sum_{k=1}^{n} z^i_k \partial/\partial z^j_k. \tag{7}$$

Les vecteurs $\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}$ forment une base de la représentation irréductible de $\mathrm{U}(n)$, de plus ils sont fonctions de déterminants $\Delta_{j_1 j_2 \ldots j_l}(z) = \det(z^{i_b}_a)j_b$, $a, b = 1, \ldots, l$. Dans la suite de ce travail nous utiliserons, soit $\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}(z^1, \ldots, z^n)$, soit $\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}(\Delta)$.

Nous nous limitons à l'étude des groupes $\mathrm{SU}(n)$, dont la base $\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}$ n'est fonction que de $(n-1)$ vecteurs seulement (Moshinsky 1963) et $h_n = 0$.

Dans le cas où $n = 3$, les vecteurs de la base de la représentation sont donnés dans les notations de Gel'fand par

$$T_3\begin{pmatrix} h_{13} & & h_{23} & & 0 \\ & h_{12} & & h_{22} & \\ & & h_{11} & & \end{pmatrix}(z^1, z^2) \qquad \text{avec } z^i = (z^i_1, z^i_2, z^i_3) \tag{8}$$

ou bien encore (Resnikoff 1967)

$$T_3\begin{pmatrix} \lambda & & \mu \\ y & t & t_z \end{pmatrix}(z^1, z^2) \tag{9}$$

avec

$$h_{23} = \mu, \qquad t = \tfrac{1}{2}(h_{12} - h_{22}),$$
$$h_{13} = \lambda + \mu, \qquad t_z = h_{11} - \tfrac{1}{2}(h_{12} + h_{22}),$$
$$y = h_{12} + h_{22} - \tfrac{2}{3}(h_{13} + h_{23}).$$

et

$$y = -(2\lambda + \mu) + 3(p + q) \qquad 0 \leqslant p \leqslant \lambda$$
$$t = \tfrac{1}{2}\mu + \tfrac{1}{2}(p - q), \qquad 0 \leqslant q \leqslant \mu$$
$$t_z = t - r, \qquad r = 0, 1, \ldots, 2t,$$

où y est l'hypercharge, t et t_z sont respectivement, l'isospin et sa projection sur l'axe des z.

2.3 Espace produit direct et représentation irréductible continue dans le produit direct

2.3.1. L'espace produit direct. $\mathscr{F}_{n_1} \otimes \mathscr{F}_{n_2} \otimes \mathscr{F}_{n_3} \otimes \ldots \otimes \mathscr{F}_{n_p}$ correspond à une décomposition de $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}(n_1 + n_2 + \ldots + n_p)$ avec $n = \Sigma_{i=1}^{P} n_i$.

$$f(z) = \prod_{i=1}^{p} f_i(z^i) \in \mathscr{F}_n \qquad f_i(z^i) \in \mathscr{F}_{n_i}. \tag{10}$$

Si $n_1 = n_2 = \ldots = n_p = n - 1$, l'espace produit direct sera noté $\mathscr{F}_n^{(p)}$ et dans ce cas

$$T_{U_n}^{(1,2,\ldots,p)} f(z) = f({}^tU_n z^1, \ldots, {}^tU_n z^{p(n-1)}), \tag{11}$$

où

$$T_{U_n}^{(1,2,\ldots,p)} = T_{U_n}^{(1)} \otimes T_{U_n}^{(2)} \otimes \ldots \otimes T_{U_n}^{(p)}. \tag{12}$$

2.3.2. Représentation irréductible continue dans le produit direct. Nous désignons par $\Gamma_n\binom{[h^k]}{(h^k)}$ la base du sous-espace $D_{[h^k]}$. La base du produit direct $\Pi_{k=1}^{p} \otimes D_{[h^k]}$ de $\mathscr{F}_n^p$ est $\Pi_{k=1}^{p} \Gamma_n\binom{[h^k]}{(h^k)}(z^{(k-1)(n-1)+1}, z^{(k-1)(n-1)+2}, \ldots, z^{k(n-1)})$

avec

$$C_k^{ii} \Gamma_n\begin{pmatrix}[h^k]\\(h^k)\end{pmatrix} = h_i^k \Gamma_n\begin{pmatrix}[h^k]\\(h^k)\end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$C_k^{ij} \Gamma_n\begin{pmatrix}[h^k]\\(h^k)\end{pmatrix} = 0 \qquad \text{si } i < j. \tag{14}$$

Pour déterminer la base de la représentation irréductible de l'espace produit direct $\Pi_{k=1}^{p} \otimes D_{[h^k]}$, nous suivons la méthode proposée par Moshinsky (1963). Nous cherchons les polynômes $P(z^1, \ldots, z^{(n-1)p})$ qui vérifient les conditions suivantes

$$C^{ii}P = h_i^k P \tag{15}$$

$$C^{ij}P = 0 \qquad \text{si } i<j \qquad i, j = (k-1)(n-1)+1, \ldots, k(n-1) \tag{16}$$

avec $k = 1, 2, 3$.

Pour analyser le produit direct de SU(n), Moshinsky observe que l'on peut se limiter au sous-ensemble des polynômes qui forment les éléments de la base des sous-espaces irréductibles de la base de la représentation de SU($p(n-1)$), vérifiant les conditions (15)–(16). Dans la suite de ce travail, nous déterminons une partie de ces polynômes à l'aide de la fonction génératrice de la base de Bargmann–Moshinsky des groupes unitaires que nous avons construite (Hage Hassan 1983).

3. Fonction génératrice des invariants de Weyl

3.1. Les invariants de Weyl

Nous allons exposer la méthode de la construction des invariants de Weyl, proposée par Bargmann (1962) dans le cas du groupe SU(2) et sa généralisation par Resnikoff (1967) ($n \geq 2$), pour la clarté de la suite de ce travail. Pour cela nous allons définir la représentation unitaire et ensuite nous nous attacherons à la détermination des représentations irreductibles contenues dans le produit direct $\Pi_{i=1}^{3} \otimes D_{[h^i]}$.

La représentation unitaire $D^{[h]}(U_n)$ est définite par la restriction de T_{U_n} sur le sous-espace $D_{[h]}$:

$$T_{U_n}\Gamma_n\begin{pmatrix}[h]\\(h)\end{pmatrix} = \sum_{(h')} D^{[h]}_{(h')(h)}(U_n)\Gamma_n\begin{pmatrix}[h]\\(h')\end{pmatrix} \tag{17}$$

$D^{[h]}_{(h')(h)}(U_n)$ sont les éléments de la matrice de la représentation du groupe U(n).

La représentation $D^{[h]}(U_n)$ étant unitaire nous pouvons associer à chaque vecteur de base $\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}$ un autre vecteur de base $\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}_C$ tel que

$$T_{U_n}\Gamma_n\begin{pmatrix}[h]\\(h)\end{pmatrix}_C = \sum_{(h')} D^{[h]}_{[h'](h)}(U_n)\Gamma_n\begin{pmatrix}[h]\\(h')\end{pmatrix}_C. \tag{18}$$

La représentation $D^{[h]}(U_n)$ est le complexe conjugué de la représentation $D^{[h]}(U_n)$.

La décomposition du produit direct de deux représentations unitaires $D^{[h^1]} \otimes D^{[h^2]}$ en une somme directe de représentation irréductible, $D^{[h^3]}$, s'effectue selon la formule

$$[h^1] \otimes [h^2] = \sum g([h^1], [h^2])[h^3], \tag{19}$$

g est le nombre de fois où la représentation irréductible $D^{[h^3]}$ est contenue dans le produit direct $D^{[h^1]} \otimes D^{[h^2]}$. Ceci implique qu'il existe g représentations irréductibles $D^{\rho}_{[h^1],[h^2]}$, ($\rho = 1, \ldots, g$), contenues dans le produit direct $\Pi_{i=1}^{2} \otimes D_{[h^i]}$ et qui ont la même dimension que $D_{[h^3]}$. Si $v_n^{\rho}\binom{[h^3]}{(h^3)}$ est un vecteur de base de $D^{\rho}_{[h^1],[h^2]}$ nous avons

$$T_{U_n}^{(1,2)} v_n^{\rho}\begin{pmatrix}[h^3]\\(h^3)\end{pmatrix} = \sum_{(h'^3)} D^{[h^3]}_{(h'^3)(h^3)}(U_n) v_n^{\rho}\begin{pmatrix}[h^3]\\(h'^3)\end{pmatrix}. \tag{20}$$

Nous considérons les vecteurs $\{a_\rho\}$ du produit direct $\Pi_{i=1}^{3} \otimes D_{[h^i]}$

$$a_\rho = \sum_{(h^3)} v_n^\rho \begin{pmatrix} [h^3] \\ (h^3) \end{pmatrix} \Gamma_n \begin{pmatrix} [h^3] \\ (h^3) \end{pmatrix}_C . \tag{21}$$

Ces vecteurs sont orthogonaux et sont invariants par la transformation $T_{U_n}^{(1,2,3)}$

$$T_{U_n}^{(1,2,3)} a_\rho = a_\rho. \tag{22}$$

Inversement, si nous avons un ensemble de vecteurs $\{h_\rho\}$ orthonormés du produit direct $\Pi_{i=1}^{3} \otimes \mathrm{D}_{[h^i]}$ tel que

$$T_{U_n}^{(1,2,3)} h_\rho = h_\rho \tag{23}$$

h_ρ se décompose dans le sous-espace $D_{[h^3]}$ comme suit

$$h_\rho = \sum_{(h^3)} u_n^\rho \begin{pmatrix} [h^3] \\ (h^3) \end{pmatrix} \Gamma_n \begin{pmatrix} [h^3] \\ (h^3) \end{pmatrix}_C , \tag{24}$$

en reportant l'expression (24) dans (23), en comparant les deux membres et en tenant compte du fait que la représentation $D^{[h^3]}$ est unitaire, nous obtenons

$$T_{U_n}^{(1,2)} u_n^\rho \begin{pmatrix} [h^3] \\ (h^3) \end{pmatrix} = \sum_{(h'^3)} D_{(h'^3)(h^3)}^{[h^3]} (U_n) u_n^\rho \begin{pmatrix} [h^3] \\ (h'^3) \end{pmatrix} . \tag{25}$$

En appliquant le lemme de Schur (voir Bargmann 1962) nous déduisons que

$$u_n^\rho \begin{pmatrix} [h^3] \\ (h^3) \end{pmatrix} = v_n^\rho \begin{pmatrix} [h^3] \\ (h^3) \end{pmatrix} \sqrt{N_3} \tag{26}$$

où N_3 est la dimension du sous-espace $D_{[h^3]}$.

En reportant l'expression (26) dans (24) nous pouvons décomposer h_ρ sur le produit direct $\Pi_{i=1}^{3} \otimes D_{[h^i]}$ comme suit

$$h_\rho = \sum_{(h^1)(h^2)(h^3)} \begin{pmatrix} [h^1] & [h^2] & [h^3] \\ (h^1) & (h^2) & (h^3) \end{pmatrix}_\rho \prod_{i=1}^{3} \Gamma_n \begin{pmatrix} [h^i] \\ (h^i) \end{pmatrix} \tag{27}$$

avec $\left(\begin{smallmatrix} [h^1] & [h^2] & [h^3] \\ (h^1) & (h^2) & (h^3) \end{smallmatrix}\right)_\rho$ qui sont les coefficients de couplage ou symboles $3[h]$ des groupes unitaires.

Les vecteurs h_ρ sont les invariants de Weyl ou de Van Der Waerden. Dans le cas où $\Gamma_n\left(\begin{smallmatrix} [h^i] \\ (h^i) \end{smallmatrix}\right)$ sont les mineurs $\Delta_{j_1 \ldots j_l}^{i}(z) \in D_{[h^i]}$ ($l < n$, $i = 1, 2, 3$), les invariants de Weyl seront appelés les scalaires élémentaires. Deux scalaires élémentaires sont compatibles lorsque le produit ne se décompose pas sur le produit des autres scalaires élémentaires.

3.2. *Détermination des invariants de Weyl*

Les invariants des Weyl h_ρ sont des polynômes invariants par $T_{U_n}^{(1,2,3)}$. Ceci implique que le polynôme h_ρ est fonction de scalaires élémentaires et plus particuliérement des scalaires élémentaires compatibles (Hongoh 1974). Par exemple, dans le cas où $n = 3$, la base de la représentation du produit direct $\Pi_{i=1}^{3} \otimes D_{[h^i]}$ est

$$\Gamma_3 \begin{pmatrix} \lambda^1 & \mu^1 & \\ y^1 & t^1 & t_z^1 \end{pmatrix} (z^1, z^2) \Gamma_3 \begin{pmatrix} \lambda^2 & \mu^2 & \\ y^2 & t^2 & t_z^2 \end{pmatrix} (z^3, z^4) \Gamma_3 \begin{pmatrix} \lambda^3 & \mu^3 & \\ y^3 & t^3 & t_z^3 \end{pmatrix} (z^5, z^6) \tag{28}$$

avec $z^i = (z_1^i, z_2^i, z_3^i)$.

Les scalaires élémentaires s'expriment dans ce cas à l'aide de produits scalaires et de produits vectoriels de l'espace à trois dimensions et nous obtenons huit scalaires élémentaires

$$\begin{array}{llll} z^1\cdot(z^3\wedge z^5), & z^1\cdot(z^3\wedge z^4), & z^1\cdot(z^5\wedge z^6), & z^3(z^1\wedge z^2) \\ z^3\cdot(z^5\wedge z^6), & z^5\cdot(z^1\wedge z^2), & z^5\cdot(z^3\wedge z^4), & (z^1\wedge z^2)\cdot[(z^3\wedge z^4)\wedge(z^5\wedge z^6)]. \end{array} \tag{29}$$

Ces scalaires sont invariants par $T_{U_3}^{(1,2,3)}$ et vérifient les conditions (15)–(16).

Nous pouvons classer les invariants de Weyl en deux groupes (Chew et Sharp 1967), les invariants qui sont fonction des sept premiers scalaires, et les invariants qui sont fonction des sept derniers. Ces invariants sont des polynômes homogènes et orthogonaux entre eux (Bargmann 1962, Resnikoff 1967). Nous savons que parmi les déterminants qui constituent les variables de la base de la représentation du groupe SU(6) figurent les sept premiers déterminants. Ainsi, nous pouvons choisir pour h_ρ, les vecteurs de la base de la représentation de SU(6) qui vérifient les conditions (15)–(16) et nous notons ces invariants $h_3\binom{[h]}{(h)}$.

Le développement de $h_3\binom{[h]}{(h)}$ sur la base (28) permettrait la détermination des symboles $3[h]$ de Wigner (Chew et Sharp 1967). Mais nous exposerons dans la suite de ce travail, une autre méthode de calcul des symboles $3[h]$ qui utilise la fonction génératrice de ces symboles.

Pour $n\geqslant 4$, la base $\Pi_{i=1}^3\Gamma_n\binom{[h^i]}{(h^i)}(\Delta^i)$ de $\Pi_{i=1}^3\otimes D_{[h^i]}$ étant fonction de déterminants (Δ^i), nous pouvons construire les scalaires élémentaires à l'aide de ces déterminants (Sharp et Lee 1971, Hongoh 1974). Les scalaires élémentaires sont invariants par $T_{U_n}^{(1,2,3)}$ et vérifient les conditions (15)–(16), de plus les invariants de Weyl $h_\rho(\Delta^1,\Delta^2,\Delta^3)$ sont fonctions de ces scalaires. Les invariants de Weyl étant orthogonaux (Resnikoff 1967) et étant fonctions de scalaires, peuvent être classés en plusieurs groupes (Sharp et Lee 1971). Mais pour le calcul des coefficients de couplage des groupes unitaires, nous nous limitons à la recherche des invariants de Weyl qui constituent les éléments de la base de la représentation irréductible du groupe $SU[3(n-1)]$ et nous désignons ces invariants par $h_n\binom{[h]}{(h)}(\Delta^1,\Delta^2,\Delta^3)$.

3.3. *Détermination de la fonction génératrice des invariants de Weyl*

La fonction génératrice de la base $\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}$ s'obtient par deux méthodes différentes que nous exposons dans le paragraphe suivant. Nous écrivons

$$\sum_{h_{\mu\nu}} A_n\varphi_n(h_{\mu\nu},(y,z))\Gamma_n\begin{pmatrix}[h]\\(h)\end{pmatrix}(\Delta(z))=\exp\Big(\sum_i \varphi_n^i x_i(z_n)\Big) \tag{30}$$

avec

$$\Gamma_n\begin{pmatrix}[h]\\(h)\end{pmatrix}=\Gamma_n\begin{pmatrix} h_{1n} & \dots & h_{n-1\,n} & h_{nn} \\ & h_{12} & h_{22} & \\ & & h_{11} & \end{pmatrix} \qquad h_{\mu\lambda}\geqslant h_{\mu,\lambda-1}\geqslant h_{\mu+1,\lambda}$$

$$\varphi_n(h_{\mu\nu},(y,z))=\prod_{\lambda=2}^{n}\prod_{\mu=1}^{\lambda-1}[z(\lambda,\mu)^{d_{\lambda\mu}}y(\lambda,\mu)^{d'_{\lambda\mu}}]\times y(\lambda,\lambda)^{h_{nn}}$$

$$d_{\lambda\mu}=h_{\mu\lambda}-h_{\mu\lambda-1},\qquad d'_{\lambda\mu}=h_{\mu\lambda-1}-h_{\mu+1,\lambda},\qquad x_i(z_n)=x_i(z^1,\dots,z^n).$$

Les coefficients A_n, ont une longue expression, nous omettons de les transcrire dans ce travail (voir Hage Hassan 1983) $\{x_i(z_n)\}$ est l'ensemble de mineurs $\{\Delta(z)\} = \{\Delta_{j_1 \ldots j_l}(z); l \leqslant n\}$.

La fonction génératrice des invariants de Weyl du groupe $SU(n)$ se déduit de l'expression (30) d'une part en remplaçant n par $3(n-1)$ et $h_{nn} = 0$ d'autre part en sélectionnant les scalaires élémentaires ${}^s x_i(z_{3(n-1)})$ parmi les variables $x_i(z_{3(n-1)})$ nous déterminons les variables ${}^s\varphi^i_{3(n-1)}$ correspondantes de $\varphi^i_{3(n-1)}$. En examinant les paramétres (y, z) des variables $\varphi^i_{3(n-1)}$ nous remarquons qu'un ensemble de ces paramétres ne figure pas dans toutes les variables ${}^s\varphi^i_{3(n-1)}$. Si nous remplaçons ces paramétres par zéro dans l'expression (30) et en posant $n = 3(n-1)$ nous obtenons la fonction génératrice des invariants de Weyl $h_n\binom{[h]}{(h)}(\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3)$. Ainsi nous écrivons

$$\sum_{h_{\mu\nu}} A_{3(n-1)}\varphi_{3(n-1)}(h_{\mu\nu}, (y, z))h_n\binom{[h]}{(h)}(\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3)$$

$$= \exp\left(\sum_i {}^s\varphi^i_{3(n-1)}\, {}^s x_i(z_{3(n-1)})\right). \tag{31}$$

Les scalaires ${}^s x_i(z_{3(n-1)})$ sont fonctions de $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3$ et nous les notons ${}^s x_i(\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3)$. La fonction génératrice (31) joue un rôle important puisque c'est grâce à elle que nous obtenons la fonction génératrice des coefficients de couplage des groupes unitaires.

4. Fonction génératrice des coefficients de couplage des groupes unitaires

4.1. *Fonction génératrice de la base canonique des groupes unitaires*

La construction de fonction génératrice des vecteurs de la base $\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}$ est obtenue (Hage Hassan 1983) par deux méthodes différentes.

La première consiste à multiplier les vecteurs $\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}$ par $\frac{1}{2}n(n+1)$ paramètres noté $\varphi_n(h_{\mu\nu}, (y, z))$ dont les puissances dépendent de $h_{\mu\nu}$ puis nous faisons la sommation sur tous les indices. Le sous-espace $D_{[h]}$ est de dimension finie, de plus, nous pouvons ordonner les vecteurs de la base $\{\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}\}$. Ainsi chaque vecteur de la base $\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}$ se déduit du vecteur maximal $\Gamma_n\binom{[h]}{(\max)}$ ou minimal $\Gamma_n\binom{[h]}{(\min)}$ par l'application des opérateurs d'échelle R^μ_λ ou L^μ_λ (Nagel et Moshinsky 1965) comme suit

$$\Gamma_n\binom{[h]}{(h)} = N \prod_{\lambda=2}^{n} \prod_{\mu=1}^{\lambda-1} (L^\mu_\lambda)^{d_{\lambda\mu}} \Gamma_n\binom{[h]}{(\max)}$$

$$= N' \prod_{\lambda=2}^{n} \prod_{\mu=1}^{\lambda-1} (R^\mu_\lambda)^{d'_{\lambda\mu}} \Gamma_n\binom{[h]}{(\min)}$$

N et N' sont des constantes de normalisation.

Nous observons dans la construction des fonctions génératrices: à chaque état est associé un produit de paramètres dont les puissances sont égales aux puissances des opérateurs d'échelle appliqués aux états extrèmes pour obtenir chaque état. Ainsi nous pouvons prendre $d_{\lambda\mu}$, $d'_{\lambda\mu}$ et h_{nn} comme puissance des paramètres z et y et nous écrivons que:

$$\varphi_n(h_{\mu\nu}, (y, z)) = \prod_{\lambda=2}^{n} \prod_{\mu=1}^{\lambda-1} [z(\lambda, \mu)^{d_{\lambda\mu}} y(\lambda, \mu)^{d'_{\lambda\mu}}] y(n, n)^{h_{nn}}.$$

Les vecteurs de base $\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}$ sont des polynômes homogènes par suite la fonction génératrice de ces vecteurs prend la forme de l'expression (30).

La deuxième méthode a été construite à partir des observations suivante: d'une part en remplaçant dans le second membre de l'expression (30) φ^i_n par $(x_i(z_n))_c$ nous obtenons un invariant par la transformation $T^{(1,2)}_{U_n}$.

$$G(\Delta(z),\Delta(z'))=\exp\Big(\sum_i (x_i(z'_n))_c x_i(z_n)\Big). \tag{32}$$

D'autre part, dans l'espace produit direct $D_{[h]}\otimes D_{[h]}$, les invariants ont la forme

$$k_n(\Delta(z),\Delta(z'))=\sum_{(h)}\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}(\Delta(z))\Big(\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}(\Delta(z'))\Big)_c. \tag{33}$$

Nous notons par $k'_n(\Delta(z),\varphi)$ la fonction qui se déduit de $k_n(\Delta(z),\Delta(z'))$ par la substitution de $(x_i(z'_n))_c$ par φ^i_n. Il est naturel de voir si la fonction $G(\Delta(z),\varphi)=\exp(\Sigma_i\,\varphi^i_n x_i(z_n))$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $k_n(\Delta(z),\varphi)$. La démonstration rigoureuse (Hage Hassan 1983) s'effectue à l'aide d'une méthode de recurrence que nous omettons d'écrire pour sa longueur ainsi que la constante B_n qui intervient dans le développement:

$$\exp\Big(\sum_i \varphi^i_n x_i(z_n)\Big)=\sum_{h_{\mu\nu}}\frac{1}{B_n}k'_n(\Delta(z),\varphi). \tag{34}$$

4.2. *Calcul de la fonction génératrice des coefficients de couplage*

Pour déterminer la fonction génératrice des coefficients de couplage, nous disposons de deux expressions différentes de $k'_n(\Delta(z),\varphi)$:

$$k'_n[\Delta(z),\varphi]=\sum_{(h)}\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}(\varphi_n)\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}(\Delta(z)), \tag{35}$$

$$=\sum_{(h)}A_nB_n\varphi_n(h_{\mu\nu},(y,z))\Gamma_n\binom{[h]}{(h)}(\Delta(z)). \tag{36}$$

Dans le produit direct $\Pi^3_{i=1}\otimes D_{[h^i]}$, nous désignons par $\Pi^3_{i=1}\,k'^i_n=\Pi^3_{i=1}\,k'_n[\Delta^i,{}^i\varphi]$ et nous considérons le produit scalaire $(h\rho,\Pi^3_{i=1}\,k'^i_n)$. Nous remarquons en nous servant des expressions (35) et (27) que:

$$\Big(h_\rho,\prod_{i=1}^3 k'^i_n\Big)=\sum_{(h^i)}\begin{pmatrix}[h^1] & [h^2] & [h^3]\\ (h^1) & (h^2) & (h^3)\end{pmatrix}_\rho\prod_{i=1}^3\Gamma_n\binom{[h^i]}{(h^i)}(i_{\varphi_n})$$
$$=h_\rho({}^1\varphi,{}^2\varphi,{}^3\varphi). \tag{37}$$

Nous obtenons une autre expression du produit scalaire $(h_\rho,\Pi^3_{i=1}\,k'^i_n)$ en utilisant les expressions (36) et (27)

$$\Big(h_\rho,\prod_{i=1}^3 k'^i_n\Big)=\sum_{(h^i)}A^i_nB^{ii}_n\varphi_n(h^i_{\mu\nu},(y,z))\begin{pmatrix}[h^1] & [h^2] & [h^3]\\ (h^1) & (h^2) & (h^3)\end{pmatrix}_\rho. \tag{38}$$

A^i_n et B^i_n se déduisant de A_n et B_n en remplaçant $h_{\mu\nu}$ par $h^i_{\mu\nu}$. En comparant les relations (37) et (38), nous obtenons

$$h_\rho({}^1\varphi,{}^2\varphi,{}^3\varphi)=\sum_{(h^i)}A^i_nB^i_n{}^i\varphi_n(h_{\mu\nu},(y,z))\begin{pmatrix}[h^1] & [h^2] & [h^3]\\ (h^1) & (h^2) & (h^3)\end{pmatrix}_\rho. \tag{39}$$

Le développement du premier membre et la comparaison du résultat obtenu avec le second membre, nous donne l'expression des coefficients de couplage des groupes unitaires.

Dans le chapitre suivant, nous utilisons cette expression pour calculer les coefficients de couplage du produit direct $[\lambda^1 0]\otimes[\lambda^2\mu^2]$ du groupe SU(3). Nous nous limitons au cas où les invariants de Weyl, h_ρ, sont les éléments de la base de la représentation de $SU(3(n-1))$ et $h_\rho({}^1\varphi, {}^2\varphi, {}^3\varphi)$ devient $h_n\binom{[h]}{(h)}({}^1\varphi, {}^2\varphi, {}^3\varphi)$. La fonction génératrice des coefficients de couplage des groupes unitaires se déduit de l'expression (31) par la substitution de Δ^i par ${}^i\mathscr{C}$. Ainsi nous obtenons:

$$\sum_{h_{\mu\nu}} A_{3(n-1)\varphi 3(n-1)}(h_{\mu\nu}, (y, z))h_n\binom{[h]}{(h)}({}^1\varphi, {}^2\varphi, {}^3\varphi)$$
$$= \exp\Big(\sum_i {}^s\varphi^i_{3(n-1)}\, {}^s x_i({}^1\varphi, {}^2\varphi, {}^3\varphi)\Big). \tag{40}$$

Cette fonction génératrice présente un grand intérêt, non seulement pour le calcul des symboles $3[h]$ des groupes unitaires, mais aussi, pour l'étude des symétries de ces coefficients de couplage.

5. Expression des coefficients de couplage du produit $[\lambda^1 0]\otimes[\lambda^2\mu^2]$ du groupe SU(3)

Les invariants de Weyl h_ρ sont des polynômes homogènes de $z^1, \ldots z^6$ et ils vérifient les conditions (15) et (16) ce qui donne

$$\begin{aligned} &C^{11}h_\rho = (\lambda^1+\mu^1)h_\rho, && C^{22}h_\rho = \mu^1 h_\rho, && C^{12}h_\rho = 0.\\ &C^{33}h_\rho = (\lambda^2+\mu^2)h_\rho, && C^{44}h_\rho = \mu^2 h_\rho, && C^{34}h_\rho = 0,\\ &C^{55}h_\rho = (\lambda^3+\mu^3)h_\rho, && C^{66}h_\rho = \mu^3 h_\rho, && C^{56}h_\rho = 0.\end{aligned} \tag{41}$$

Pour déterminer les invariants de Weyl h_ρ, dans le cas général, il faut utiliser la méthode que nous avons déjà exposée au paragraphe (3). Mais dans le cas où l'un des $\mu_i = 0$, nous pouvons chercher les invariants qui sont fonctions des scalaires élémentaires et qui satisfont aux conditions (41). La solution dans ce cas est déjà connue (Resnikoff 1967)

$$h_{[k_i]} = \Delta(k_i)\frac{[z^1\cdot(z^3\wedge z^5)]^{k_0}}{k_0!}\frac{[z^3\cdot(z^5\wedge z^6)]^{k_1}}{k_1!}\frac{[z^1\cdot(z^5\wedge z^6)]^{k_2}}{k_5!}\frac{[z^5\cdot(z^3\wedge z^4)]^{k_6}}{k_6!}$$
$$\times\frac{[z'\cdot(z^3\wedge z^4)]^{k_5}}{k_2!}. \tag{42}$$

Le coefficient de normalisation $\Delta(k_i)$ a pour valeur

$$\Delta(k_i) = \left(\frac{2k_0!k_1!k_2!k_5!k_6!(k_0+k_1+1)!(k_0+k_6+1)!}{(p+2)!(k_0+k_1+k_2+1)!(k_0+k_1+k_6+1)!(k_0+k_5+k_6+1)!}\right)^{1/2}$$

avec $p = k_0+k_1+k_2+k_5+k_6$.

Pour déterminer les coefficients de couplage, nous devons calculer $h_\rho({}^1\varphi, {}^2\varphi, {}^3\varphi)$, (voir (39)), ce qui implique la connaissance des variables ${}^i\varphi_n$. Ces variables se déduisent de la fonction génératrice de la base de la représentation du groupe SU(3) qui est donnée par

$$\sum_{h_{\mu\nu}} A_3\varphi_3(h_{\mu\nu},(w,u,v))\Gamma_3\binom{[h]}{(h)}(\Delta)$$
$$=\exp[(\Delta_1 w_1+\Delta_2 w_2)u_1+\Delta_3 v_1+(\Delta_{13}w_1+\Delta_{23}w_2)u_2+\Delta_{12}v_2]. \tag{43}$$

avec

$$\varphi_3(h_{\mu\nu},(w,u,v))=(w)^{h_{12}-h_{11}}(v_1)^{h_{13}-h_{12}}(u_2)^{h_{23}-h_{22}}(w_1)^{h_{11}-h_{22}}(u_1)^{h_{12}-h_{23}}(v_2)^{h_{22}}.$$

Les variables ${}^{i}\varphi_n$ sont définis par

$$\begin{aligned} e_1^i&=w_1^iu_1^i, & e_2^i&=w_2^iu_1^i, & e_3^i&=v_1^i\\ f_1^i&=w_2^iu_2^i, & f_2^i&=-w_1^iu_2^i, & f_3^i&=v_2^i. \end{aligned} \tag{44}$$

Dans $h_{[k_i]}$, nous remplaçons $z^1\cdot(z^3\wedge z^5)$, $z^1\cdot(z^5\wedge z^6)$, $z^5\cdot(z^3\wedge z^4)$, $z^3\cdot(z^5\wedge z^6)$ et $z^1\cdot(z^3\wedge z^4)$ respectivement par $e^1\cdot(e^2\wedge e^3), e^1\cdot f^3, e^3\cdot f^2$, $e^2\cdot f^3$, et $e^1\cdot f^1$. L'expression (39) s'écrit alors

$$\frac{\Delta(k_i)[e^1\cdot(e^2\wedge e^3)]^{k_0}(e^2\cdot f^3)^{k_1}(e^1\cdot f^3)^{k_2}(e^1\cdot f^2)^{k_5}(e^3\cdot f^2)^{k_6}}{k_0!\,k_1!\,k_2!\,k_5!\,k_6!}$$
$$=\sum_{(h^i)}\begin{pmatrix}[h^1] & [h^2] & [h^3]\\ (h^1) & (h^2) & (h^3)\end{pmatrix}A_3^iB_3^i\varphi(h_{\mu\nu}^i,(w^i,u^i,v^i)). \tag{45}$$

Nous développons le premier membre de (45) en utilisant les relations (44) et la fonction génératrice de la base de la représentation du groupe SU(2) (Schwinger 1965):

$$[(T+1)!]^{-1/2}[w^1w^2]^{T-2t^3}[w^1w^3]^{T-2t^2}[w^2w^3]^{T-2t^1}\bigg/\left(\prod_{i=1}^{3}(T-2t^i)!\right)^{1/2}$$
$$=\sum_{t^it_z^i}\begin{pmatrix}t^1 & t^2 & t^3\\ t_z^1 & t_z^2 & t_z^3\end{pmatrix}\prod_{i=1}^{3}\frac{(w_1^i)^{t^i-t_z^i}(w_2^i)^{t^i+t_z^i}}{[(t^i-t_z^i)!(t^i+t_z^i)!]^{1/2}}$$

avec

$$T=t^1+t^2+t^3,\qquad [w^iw^j]=w_1^iw_2^j-w_2^iw_1^j, \tag{46}$$

où $\binom{t^1\,t^2\,t^3}{t_z^1\,t_z^2\,t_z^3}$ sont les coefficients de couplage du groupe SU(2), et nous obtenons l'expression des symboles $3(\lambda\mu)$ du groupe SU(3), avec $\mu^1=0$, qui s'écrivent:

$$\begin{pmatrix}\lambda^1 0 & \lambda^2\mu^2 & \lambda^3\mu^3\\ (\alpha^1) & (\alpha^2) & (\alpha^3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^1 0 & \lambda^2\mu^2 & \lambda^3\mu^3\\ y^1t^1 & y^2t^2 & y^3t^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^1 & t^2 & t^3\\ t_z^1 & t_z^2 & t_z^3\end{pmatrix} \tag{47}$$

avec $(\alpha^i)=(y^it^it_z^i)$.

Le premier facteur du second membre de l'expression (47) est le facteur isoscalaire du groupe SU(3). Nous donnons son expression en conservant les indices de Gel'fand $h_{\mu\nu}^i$ pour ne pas en alourdir la forme.

$$\begin{pmatrix}\lambda^1 0 & \lambda^2\mu^2 & \lambda^3\mu^3\\ y^1t^1 & y^2t^2 & y^3t^3\end{pmatrix}$$
$$=\frac{\Delta(k_i)(-1)^{h_{13}^3+h_{12}^3-s}}{\Pi_{i=1}^3(A_3^iB_3^i)}$$
$$\times\frac{((T+1)!\Pi_{i=1}^3(T-2t^i)![(t^i-t_z^i)!(t^i+t_z^i)!]^{-1})^{1/2}}{i!\,r!\,s!\,j_1!\,j_2!\,j_3!\,j_4!\,(k_1-j_1)!\,(k_2-j_2)!\,(k_5-j_3)!\,(k_6-j_4)!} \tag{48}$$

avec

$$P = \tfrac{1}{3}(\lambda^1 + \lambda^2 + 2\mu^2 + 2\lambda^3 + \mu^3),$$

$k_0 = p - (\lambda^3 + \mu^3)$, $\quad k_1 = (\lambda^2 + \mu^2 + \lambda^3) - p$, $\quad k_2 = p - (\lambda^2 + \mu^2)$,

$k_5 = p - (\lambda_3 + \mu_3)$, $\quad k_6 = (\lambda^3 + \mu^3 + \mu^2) - p$,

$r = \tfrac{1}{2}(h_{13}^2 + T - h_{22}^3 - h_{12}^2 - 2t^2)$,

$s = \tfrac{1}{2}(T - 2t^3 - h_{22}^2 - h_{12}^3 + h_{13}^3)$,

$i = k_0 - r - s$, $\quad j_1 = h_{13}^2 - h_{12}^2 - r$, $\quad j_2 = h_{22}^3 + h_{12}^2 - h_{13}^2 + r$

$j_3 = h_{22}^2 + h_{12}^3 - h_{13}^3 + s$, $\quad j_4 = h_{13}^3 - h_{12}^3 - s$.

Les symboles $3(\lambda\mu)$ du groupe SU(3) sont factorisés en produit de deux coefficients, le symbole $3(t)$ de SU(2) et le facteur isoscalaire du groupe SU(3). Nous obtenons une expression du facteur isoscalaire qui ne comporte pas de sommations. La comparaison entre notre expression et celle obtenue d'abord par Moshinsky (1962) et ensuite par Resnikoff (1967), qui comporte cinq sommations, montre l'importance considérable de notre technique de calcul.

6. Conclusion

Nous avons construit de deux manières différentes la fonction génératrice de la base de la représentation des groupes unitaires. D'une part, nous utilisons les résultats de la méthode infinitésimale (Nagel et Moshinsky 1965) et la propriété des fonctions génératrices que nous avons établie, d'autre part nous construisons cette fonction par un calcul de récurrence et utilisation des fonctions noyaux. Disposant ainsi de deux développements différents de la fonction génératrice de la base de la représentation des groupes unitaires nous obtenons deux expressions différentes des invariants de Weyl exprimées en termes de paramètres de la fonction génératrice et en comparant les deux expressions nous déterminons les coefficients de couplage des groupes unitaires. Il est important de souligner que notre méthode est une méthode globale ne faisant pas appel aux opérateurs échelle dans la détermination des invariants de Weyl.

L'application de notre méthode au calcul des coefficients de couplage du produit direct $[\lambda^1 0] \otimes [\lambda^2 \mu^2]$ du groupe SU(3), dont Moshinsky calcule une expression qui comporte cinq sommations, nous donne ces coefficients sous la forme d'un produit de deux termes, où l'un des facteurs est le symbole 3-j du groupe SU(2) et l'autre terme est le facteur isoscalaire du groupe SU(3). Il est important d'observer que l'expression du facteur isoscalaire du groupe SU(3) que nous obtenons ne fait intervenir aucune sommation. Ceci montre l'intérêt fondamental de notre approche. Nous menons à bien, les calculs de tous les coefficients de couplage, des groupes SU(3), SU(4), SU(5) en appliquant notre méthode parce qu'ils présentent un grand intérêt en physique. Nous nous proposons d'utiliser notre méthode dans le calcul des coefficients de couplage des groupes orthogonaux, symplectiques et autres groupes semi-simples.

Remerciements

Ayant été contraint par faits de guerre, de quitter le Liban et de refaire ce travail, je tiens à remercier pour leur accueil chaleureux lors de mon arrivée à Lyon, tous les membres de l'Institut de Physique Nucléaire et plus particulièrement le Dr M Kibler qui m'a beaucoup aidé et a mis à ma disposition toute la documentation nécessaire.

Références

Bargmann V 1962 *Rev. Mod. Phys.* **34** 829
Biedenharn L C, Giovanni A et Louck J D 1969 *J. Math. Phys.* **8** 691
Brody T A, Moshinsky M et Renero I 1965 *J. Math. Phys.* **6** 1540
Chew C K et Sharp R T 1967 *Nucl. Phys.* B **2** 697
Hage Hassan M 1983 *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** 1835
Henrich C 1975 *J. Math. Phys.* **16** 2271
Hongoh M 1974 *3rd Int. Colloq. on Group Theoretical Methods in Physics, Marseille*
Moshinsky M 1962 *Rev. Mod. Phys.* **34** 813
—— 1963 *J. Math. Phys.* **4** 1128
Nagel J G et Moshinsky M 1965 *J. Math. Phys.* **6** 682
Resnikoff M 1967 *J. Math. Phys.* **8** 63
Sharp R T et Lee D 1971 *Rev. Mex. Fis.* **20** 203
Van der Waerden B L 1932 *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik* (Berlin: Springer)